MA1 Domácí úkol 4. – derivace funkce

Jméno a příjmení : Hodnocení :

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

1. $f(x)=e^{-x^2}\sin x$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x\sin x + \cos x) \quad , \mathscr{D}f = \mathscr{D}f' = R$$

2. $f(x)=x^2\ln(arctg 2x)$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(\operatorname{arctg}(2x)) + x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}(2x)} \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 =$$

$$= 2x\left(\ln(\operatorname{arctg}(2x)) + \frac{x}{(1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x)}\right) \quad , \mathscr{D}f = \mathscr{D}f' = (0,+\infty)$$

3. $f(x)=\frac{3}{(x^2-1)^2}$ $\quad x \neq \pm 1, \ \mathscr{D}f = \mathscr{D}f'$

$$f'(x) = -6 \cdot (x^2-1)^{-3} \cdot 2x = \frac{-12x}{(x^2-1)^3}$$

4. $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\mathscr{D}f = (-\infty,-1\rangle \cup (2,+\infty) , \quad \mathscr{D}f' = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$$

5. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ $\quad \mathscr{D}f = \langle 0,+\infty)$

$$f'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad \text{pro } x \in (0,+\infty)$$

(*) takéž lze : $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{\to 1} = -\frac{1}{2}$

6. V příkladu 5. vypočítejte i derivaci v bodě $x=0$ zprava

$$f'_+(0) \underset{def}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{-\sin^2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2(\cos\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \underbrace{-\frac{1}{\cos\sqrt{x}+1}}_{\to\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}_{\to 1} = -\frac{1}{2} \quad (*)$$

$(AL + \overline{VLSF})$

7. $f(x)=\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} \underset{def.}{=} e^{x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$, $D_f=\{x\in R;\ 1+\frac{3}{x}>0\}=$

$= (-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$

$$f'(x) = \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)+\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) - \frac{3}{x+3}\right], \quad D_f = D_{f'}$$

8. Spočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(4x^2+1)}{\sin x^2}$. $= \text{„}\frac{0}{0}\text{“} \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{4x^2+1}\cdot 8x}{\cos(x^2)\cdot 2x} = \underline{4}$

(také bez l'H. $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(4x^2+1)}{4x^2}\cdot 4x^2}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot x^2} = 4$)

9. Spočítejte limitu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} \underset{def.}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to3} e^{y} = \underline{e^{3}}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\underbrace{\frac{1}{x}\cdot 3}_{\to 1}}\cdot 3 \underset{(T)}{=} 3 \quad \text{nebo}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“} \overset{*}{\underset{l'H.}{=}} \lim\frac{\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 3$$

(také zde $\overset{*}{=}$ (VLSF: $\frac{1}{x}=t$) $= \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+3t)}{t}$)

10. Vyšetřete, zda lze v bodě $a=0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f, která je pro $x\neq 0$ dána předpisem

$$f(x)=\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

Dodefinovat fci f v bodě $a(=0)$ spojitě lze, když existuje vlastní $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L\in R$, pak $f(a)=L$ (z def. spojitosti: f je spojitá v bodě a, když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$)

zde: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“} \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\Big(\underbrace{-\frac{1}{\cos x\cdot 2}}_{\to -\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\Big) = -\frac{1}{2}$

tj. $\boxed{f(0) = -\frac{1}{2}}$